FORSÖG

TIL

EN ELEMENTAIR FREMSTILLING

AF DE

PERIODISKE KJÆDEBRÖKERS

EGENSKABER

VED

P. DORPH BROAGER,

CAND. PHILOSOPHIÆ & POLYTECHNICES.

I. **A**ntages i Ligningen

$$x = \frac{p}{q + x}$$

p og q at være hele positive Tal samt

$$p < q + 1, \text{ saa er}$$

$$x < 1 \text{ og irrational.}$$

Lad os nemlig antage

$$x = \frac{A}{B}$$

samt A og B at være hele endelige Tal, der ikke have nogen fælleds Factor, saa maa A være mindre end B og tillige

$$x = \frac{A}{B} = \frac{p}{q + \frac{A}{B}} = \frac{pB}{qB + A} = \frac{qA}{qB} = \frac{pB - qA}{A},$$

i hvilket sidste Udtryk $pB - qA$ maa være mindre end A, da A er mindre end B. Men saa er Ligningen

$$\frac{A}{B} = \frac{pB - qA}{A}$$

en Urimelighed, da en Brök, hvis Tæller og Nævner ere indbyrdes Primtal, ikke kan være liig nogen Brök med respective mindre Tæller og Nævner. Mit Antagende, at x er liig en rational Brök, er altsaa urigtigt, og x maa være irrational.

T*

II. Forsöger man at udvikle x i Form af en Kjædebrök og bliver staaende ved den förste complete Qvotient, da haves

$$x = \frac{p}{q+x} = \frac{1}{a + \frac{b+x}{p}},$$

i hvilket Udtryk a antages at være det störste hele Tal, som multipliceret med p giver et Product $< q+1$. b bliver $= q - ap$.

III. Multipliceres Resten $\frac{b+x}{p}$ med $q - b + x$, erholdes et Product

$$\frac{(b+x)(q-b+x)}{p} = \frac{b(q-b) + x^2 + qx}{p}$$

$$= \frac{b(q-b)+p}{p} = \frac{(q-ap)\,ap+p}{p}$$

paa Grund af, at $x^2 + qx = p$ og at $b = q - ap$. Bortdivideres i det sidste Udtryk p i Tæller og Nævner, erholdes

$$\frac{(b+x)(q-b+x)}{p} = (q-ap)\,a + 1, \text{ hvoraf udledes}$$

$$\frac{b+x}{p} = \frac{(q-ap)\,a+1}{q-b+x} = \frac{p_{,}}{q-b+x},$$

idet $(q - ap)\,a + 1$ sættes $= p_{,}$.

Resten $\frac{b+x}{p}$ kan altsaa transformeres til en Brök, hvis Tæller $p_{,}$ er et heelt Tal og hvis Nævner er et heelt Tal $+x$. Da $q - b + x = ap + x > p$ saa er ogsaa

$$p_{,} > b + x > b.$$

Foretager man for at udvikle $\frac{p_{,}}{q-b+x}$ i Form af en Kjædebrök de samme Operationer som med $\frac{p}{q+x}$, saa erholdes

$$\frac{p_{,}}{q-b+x} = \frac{1}{a_{,} + \frac{b+x}{p_{,}}},$$

i hvilket Udtryk $a_{,}$ antages at være den störste hele Factor, der med $p_{,}$ giver et Product $<q-b+1$. $b_{,}$ er altsaa $=q-b-a_{,}p_{,}$. Resten $\frac{b_{,}+x}{p_{,}}$ kan ved samme Fremgangsmaade som den, der brugtes ved Transformationen af $\frac{b+x}{p}$ til $\frac{p_{,}}{q-b+x}$, transformeres til en Brök af Formen $\frac{p_{,,}}{q-b_{,}+x}$. Multipliceres nemlig Resten $\frac{b_{,}+x}{p}$ med $q-b_{,}+x$, saa erholdes

$$\frac{(b_{,}+x)(q-b_{,}+x)}{p_{,}}=\frac{b_{,}(q-b_{,})+x^2+qx}{p_{,}}$$

(da $x^2+qx=p$) $$=\frac{b_{,}(q-b)+p}{p_{,}}$$

(da $b_{,}=q-b-a_{,}p_{,}$) $$=\frac{(q-b-a_{,}p_{,})(b+a_{,}p_{,})+p}{p_{,}}$$

$$=\frac{a_{,}p_{,}(q-2b-a_{,}p_{,})+b(q-b)+p}{p_{,}}$$

(da $b(q-b)+p=pp_{,}$) $$=\frac{a_{,}p_{,}(q-2b-a_{,}p_{,})+pp_{,}}{p_{,}}$$

$$=a_{,}(q-2b-a_{,}p_{,})+p$$

(da $q-b-a_{,}p_{,}=b_{,}$) $$=a_{,}(b_{,}-b)+p.$$

Den saaledes fundne Ligning

$$\frac{(b_{,}+x)(q-b_{,}+x)}{p_{,}}=a_{,}(b_{,}-b)+p$$

giver

$$\frac{b_{,}+x}{p_{,}}=\frac{a_{,}(b_{,}-b)+p}{q-b_{,}+x}=\frac{p_{,,}}{q-b_{,}+x}$$

idet $a_{,}(b_{,}-b)+p$ sættes $=p_{,,}$

Da $$q-b_{,}+x=b+a_{,}p_{,}+x>p_{,}$$

saa er

$$p_{,,}>b_{,}+x>b_{,}$$

Ved Udviklingen i Kjædebröks Form giver, under samme Forudsætninger som ovenfor,

$$\frac{b_{,}+x}{p}=\frac{p_{,,}}{q-b_{,}+x}$$

det nye Udtryk

$$\frac{1}{a_{,,}+\dfrac{b_{,,}+x}{p_{,,}}},$$

hvori

$$b_{,,}=q-b_{,}-a_{,,}p_{,,}.$$

Transformeres som ovenfor $\dfrac{b_{,,}+x}{p_{,,}}$ til $\dfrac{p_{,,,}}{q-b_{,,}+x}$, erholdes paa aldeles lignende Maade

$$p_{,,,}=a_{,,}(b_{,,}-b_{,})+p_{,}.$$

Da $q-b_{,,}+x=b_{,}+a_{,,}p_{,,}+x>p_{,,}$, saa er ogsaa

$$p_{,,,}>b_{,,}+x>b_{,,}.$$

Da disse Operationer kunne fortsættes saalangt man vil, og Resterne stedse kunne transformeres paa samme Maade, saa har man ganske almindeligt

$$\frac{b_n+x}{p_n}=\frac{p_{n+1}}{q-b_n+x},$$

hvori

$$b_n=q-b_{n-1}-a_n p_n,$$

$$q-b_n=b_{n-1}+a_n p_n,$$

$$p_{n+1}=a_n(q-2b_{n-1}-a_n p_n)+p_{n-1}$$
$$=a_n(b_n-b_{n-1})+p_{n-1}.$$

Da $q-b_n+x=b_{n-1}+a_n p_n+x>p_n$, saa er

$$p_{n+1}>b_n+x>b_n.$$

IV. Ombyttes i Resten og den transformerede Rest p_n og p_{n+1}, erholdes Ligningen

$$\frac{b_n+x}{p_{n+1}}=\frac{p_n}{q-b_n+x}=\frac{p_n}{a_n p_n+b_{n-1}+x}.$$

Udvikles Udtrykket, vi saaledes have fundet, i Kjædebröks Form, erholdes, da $p_n > b_{n-1} + x$, $\cfrac{1}{a_n + \cfrac{b_{n-1}+x}{p_n}}$, hvori, efter III,

$$\frac{b_{n-1}+x}{p_n} = \frac{p_{n-1}}{q - b_{n-1} + x}.$$

Udvikles atter

$$\frac{p_{n-1}}{q - b_{n-1} + x} = \frac{p_{n-1}}{a_{n-1}p_{n-1} + b_{n-2} + x}$$

i Kjædebröks Form, erholdes atter $\cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-2}+x}{p_{n-1}}}$, i hvilket Udtryk Resten $\frac{b_{n-2}+x}{p_{n-1}}$ ved Transformation og Udvikling i Kjædebrök paa samme Maade som ovenfor giver

$$\frac{p_{n-2}}{q - b_{n-2} + x} = \frac{p_{n-2}}{a_{n-2}p_{n-2} + b_{n-3} + x}$$

$$= \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{b_{n-3}+x}{p_{n-2}}}$$

Da disse Operationer kunne fortsættes saa langt man vil, indsees, at man ved at ombytte de respective Nævnere og Tællere i Resterne og de transformerede Rester og derpaa at udvikle denne Værdie i Form af Kjædebrök faaer Qvotienterne i omvendt Orden, saa at

$$\frac{b_n + x}{p_{n+1}} = \frac{p_n}{q - b_n + x} = \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-3} + \cdots}}}}$$

V. Videre indsees, at man af Resten og den transformerede Rest kan finde Qvotienten i den complete Qvotient, hvortil Resten hörer, og altsaa ogsaa den complete Qvotient selv, der er liig Qvotient + Rest.

VI. Multipliceres Tæller og Nævner i Bröken $\cfrac{1}{a_n + \cfrac{b_n + x}{p_n}}$ med p_n, erholdes

$$\frac{p_n}{a_n p_n + b_n + x},$$

som, paa Grund af

$$b_n = q - b_{n-1} - a_n p_n,$$

er $= \dfrac{p_n}{q - b_{n-1} + x} = \dfrac{b_{n-1} + x}{p_{n-1}}$.

Man seer heraf, at der til den samme Rest stedse hörer samme Qvotient og samme foregaaende transformerede Rest &c.

VII. Da nu i de transformerede Rester $\dfrac{p_n}{q - b_{n-1} + x}$, p_n og $q - b_{n-1}$ ere hele Tal $< q$, saa maae efter Udviklingen af et endeligt Antal Led i Kjædebröken de samme transformerede Rester vende tilbage. Vi erholde da

$$\frac{p_m}{q - b_{m-1} + x} = \frac{p_{m+n}}{q - b_{m+n-1} + x},$$

men ifölge Ovenanförte haves da ogsaa

$$\frac{p_{m-1}}{q - b_{m-2} + x} = \frac{p_{m+n-1}}{q - b_{m+n-2} + x} \text{ o. s. v.}$$

indtil man endelig ved successive at gaae tilbage paa denne Maade kommer til

$$\frac{p}{q - b_{-1} + x} = \frac{p_n}{q - b_{n-1} + x} = \frac{p}{q + x} = x$$

idet $\dfrac{p}{q + x}$ kan betragtes som den förste transformerede Rest. Den af Ligningen $x = \dfrac{p}{q + x}$ erholdte Kjædebrök maa være fuldkommen periodisk og have Formen

$$\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_{,}+\cfrac{1}{a_{,,}+\cfrac{1}{a_{,,,}+\cdots\cfrac{1}{a_n+x}}}}}$$

idet een af de transformerede Rester stedse maa være liig $\frac{p}{q+x}=x$.

VIII. Antages $\frac{p_{n+1}}{q-b_n+x}=\frac{p}{q+x}=x$, saa bliver $b_n=0$, $p_{n+1}=p$ og $p_n=1$, da x maa være $=$

$$\frac{b_n+x}{p_n}.$$

Ombyttes, for at bestemme a_n i $\frac{x}{1}=\frac{p}{q+x}$, 1 og p, saa erholdes

$$\frac{x}{p}=\frac{1}{q+x}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_{,}\cdots}}}$$

a_n er altsaa $=q$, og, da videre ifölge IV Qvotienterne i den ved denne Ombytning frembragte Kjædebrök ikke ere andet end den primitive Kjædebröks Qvotienter i omvendt Orden regnede fra a_n inclusive, saa indsees at

$$\begin{aligned}
a_n &= q &&= a_n\\
a_{n-1} &= a_0 &&= a_{n+1}\\
a_{n-2} &= a_{,} &&= a_{n+2}\\
a_{n-3} &= a_{,,} &&= a_{n+3}\\
&\vdots &&\vdots\\
a_{n-m} &= a_{m-1} &&= a_{n+m}.
\end{aligned}$$

IX. Da videre (IV) de ved den tilbagegaaende Udvikling erholdte Rester og transformerede Rester slet ikke ere andet end de foregaaende Rester og transformerede Rester tagne i omvendt Orden og med Ombytning af de rationale Tællere og Nævnere, saa erholdes nedenstaaende

Udvikling, hvori de med samme Nr. betegnede Ligninger ere indbyrdes aldeles identiske.

$$(1)\quad \frac{b_n+x}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{q-b_n+x} \qquad (1)\quad \frac{x}{1} = \frac{p}{q+x}$$

$$(2)\quad \frac{b_n+x}{p_{n+1}} = \frac{p_n}{q-b_n+x} \qquad (2)\quad \frac{x}{p} = \frac{1}{q+x}$$

$$= \frac{p_n}{a_n p_n + b_{n-1} + x} \qquad = \frac{1}{q+x}$$

$$= \frac{1}{a_n + \dfrac{b_{n-1}+x}{p_n}} \qquad = \frac{1}{q+x}$$

$$(3)\quad \frac{b_{n-1}+x}{p_n} = \frac{p_{n-1}}{q-b_{n-1}+x} \qquad (3)\quad x = \frac{p}{q+x}$$

$$= \frac{p_{n-1}}{a_{n-1}p_{n-1}+b_{n-2}+x} \qquad = \frac{1}{a_0 + \dfrac{b+x}{p}}$$

$$= \frac{1}{a_{n-1} + \dfrac{b_{n-2}+x}{p_{n-1}}}$$

$$(4)\quad \frac{b_{n-2}+x}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{q-b_{n-2}+x} \qquad (4)\quad \frac{b+x}{p} = \frac{p_,}{q-b+x}$$

$$= \frac{p_{n-2}}{a_{n-2}p_{n-2}+b_{n-3}+x}$$

$$= \frac{1}{a_{n-2} + \dfrac{b_{n-3}+x}{p_{n-2}}} \qquad = \frac{1}{a_, + \dfrac{b_,+x}{p_,}}$$

Heraf sees, at $b_n = 0$, da $\dfrac{b_n+x}{p_n} = \dfrac{x}{1}$,

$$p_n = 1$$

$$p_{n+1} = p$$

og at

$$b_{n-1} = 0$$

$$b_{n-2} = b$$

$$b_{n-3} = b_{,}$$

$$p_{n-1} = p$$

$$p_{n-2} = p_{,}$$

og saaledes videre. En fortsat Udvikling vil ganske almindeligt give

$$b_{n-m} = b_{m-2}$$

$$p_{n-m} = p_{m-1}.$$

Heraf indsees at Kjædebrökens förste $n-1$ Led ere symmetriske ikke alene med Hensyn til Qvotienterne, men ogsaa med Hensyn til Resternes og de transformerede Resters Tællere og Nævnere, saaledes, at i den $n-m^{te}$ og $m-2^{de}$ complete Qvotient forekomme de samme Störrelser i Resterne og de transformerede Rester, kun med den Forskjel, at den $m-2^{de}$ Rests Nævner er den $n-m^{te}$ transformerede Rests Tæller og at den $m-2^{de}$ transformerede Rests Tæller er den $n-m^{te}$ Rests Nævner. Dette stemmer ogsaa overeens med at den $n-m^{te}$ Qvotient er liig den $m-1^{te}$ Qvotient.

X. Er n et ulige Tal $= 2h+1$, saa er $n-1$ et lige Tal $= 2h$. Da det almindeligt er fundet, at

$$b_{n-m} = b_{m-2},$$

saa haves ogsaa

$$b_{n-h-1} = b_{(h+1)-2};$$

men antages $n = 2h+1$, saa giver dette

$$b_{(h)} = b_{(h-1)},$$

med Ord, at Nævnerne i to paa hinanden fölgende Rester ere ligestore. Transformeres altsaa Resten $\dfrac{b_{h-1}+x}{p_{h-1}}$ til $\dfrac{p_h}{q-b_{h-1}+x}$ og udvikles denne paa sædvanlig Maade i Kjædebröks Form, saa erholdes $\dfrac{1}{a_{(h)}+\dfrac{b_h+x}{p_h}}$, men da $b_h = b_{(h-1)}$, saa indsees, at $\frac{b_h + x}{p_h}$ netop er liig den Störrelse, der erholdes naar i $\frac{b_{h-1} + x}{p_{h-1}} = \frac{p_h}{q - b_{(h-1)} + x}$, p_h og $p_{(h-1)}$ ombyttes, hvorved man, som ovenfor viist (IV), ved Udvikling i Kjædebrök faaer Qvotienterne i omvendt Orden.

Er n et lige Tal, saa er $n - 1$ et ulige Tal $= 2h - 1$. Man har da ifölge IX $p_{(h-1)} = p_{n-h} = p_{(h)}$, eller med Ord: Tællerne i to paa hinanden fölgende transformerede Rester ere ligestore, hvoraf atter fölger, at Nævneren i den $h - 1^{te}$ Rest er liig Tælleren i dens tilsvarende transformerede Rest. Her indtræder nu det samme Tilfælde som ovenfor, naar Tæller og Nævner ombyttes, og en fremskridende Udvikling giver ogsaa her de foregaaende Qvotienter i omvendt Orden, noget som ifölge den allerede beviste Symmetrie ogsaa maa finde Sted. I sidste Tilfælde bliver $a_{(h-1)} = a_{(h)}$, medens, naar n er et ulige Tal, $a_{(h-1)}$ bliver $= a_{(h+1)}$. I förste Tilfælde er altsaa Qvotienternes Antal i den symmetriske Deel af Kjædebröken et lige Tal, i sidste derimod et ulige Tal, idet $a_{(h)}$ ligger midt i den symmetriske Række.

XI. Betragter man Udviklingen i Kjædebrök af

$$x = \frac{p}{q + x} = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_, + \cfrac{1}{a_{,,} + \cdots + \cfrac{1}{a_{,,} + \cfrac{1}{a_, + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{q + x}}}}}}}$$

og antages q at være den n^{te} Qvotient samt betegner den n^{te} Convergent med $\frac{X_n}{Y_n}$, den $n - 1^{te}$ med $\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}$ &c., saa erholdes fölgende nye Udtryk for $x = \frac{p}{q + x}$

$$x = \frac{p}{q+x} = \frac{X_n + X_{n-1}x}{Y_n + Y_{n-1}x} = \frac{X_n}{Y_n - X_{n-1} + Y_{n-1}x}.$$

Heraf kan man slutte, at

$$X_n = p\,Y_{n-1}$$

da ellers x vilde blive rational, men X_n kan tillige ifölge Kjædebrökernes bekjendte Egenskaber udtrykkes ved

$$q\,X_{n-1} + X_{n-2} = X_n = p\,Y_{n-1}$$

saa at man har $p\,Y_{n-1} - q\,X_{n-1} = X_{n-2}$. Ved at oplöse denne ubestemte Ligning af förste Grad kan man altsaa finde de Værdier af p og q, der ved Udviklingen af $x = \frac{p}{q+x}$ i Form af Kjædebrök ville frembringe en given symmetrisk Række af Qvotienter.

De saaledes fundne Værdier af p og q give nemlig med $\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}$ og $\frac{X_{n-2}}{Y_{n-2}}$ X_n og Y_n. Sættes nu

$$x = \frac{X_n + X_{n-1}x}{Y_n + Y_{n-1}x},$$

saa erholdes ogsaa

$$x = \frac{X_n}{Y_n - X_{n-1} + Y_{n-1}x},$$

men ifölge de symmetriske Kjædebrökers Egenskaber er $X_{n-1} = Y_{n-2}$, og altsaa

$$x = \frac{X_n}{q\,Y_{n-1} + Y_{n-1}x} = \frac{p\,Y_{n-1}}{q\,Y_{n-1} + Y_{n-1}x} = \frac{p}{q+x}.$$

XII. Sætter man i Opgaven

$$v^2 = z^2 a \pm 1,$$

hvori v og z ere de sögte og a det givne hele Tal,

$$a = p + \frac{q^2}{4},\ p \text{ antaget} < q + 1,$$

erholdes

$$v^2 = z^2\left(p + \frac{q^2}{4}\right) \pm 1;$$

sættes $v = b + \frac{zq}{2}$, haves videre

$$b^2 + bzq + \frac{z^2q^2}{4} = z^2p + \frac{z^2q^2}{4} \pm 1$$

$$b^2 + bzq - z^2p = \pm 1$$

$\frac{b}{z}$ og $\frac{zp}{b+zq}$ kunne altsaa respective betragtes som de $n-1^{te}$ og n^{te} Convergenter i en indtil n^{te} Led symmetrisk Kjædebrök. Da nemlig $p < q+1$, saa bliver Nævneren i den $n-2^{de}$ Convergent $b =$ Tælleren i den $n-1^{te}$ Convergent.

Sættes nu

$$x = \frac{zp + bx}{zq + b + zx},$$

saa haves ogsaa

$$x = \frac{zp}{zq + zx} = \frac{p}{q+x}$$

$x = \frac{p}{q+x}$ giver ved Udviklingen en Kjædebrök af Formen

$$\cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_, + \cfrac{1}{a_{,,} \cdots + \cfrac{1}{a_{,,} + \cfrac{1}{a_, + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{q+x}}}}}}}$$

Den samme Kjædebrök vil ogsaa erholdes ved paa den med endelige Bröker sædvanlige Maade at udvikle

$$x = \frac{zp + bx}{zq + b + zx}$$

i Form af en Kjædebrök, men heraf indsees at

$$z = Y_{n-1}$$

$$v = X_{n-1} + \frac{Y_{n-1}q}{2}.$$

For at oplöse den ubestemte Ligning af anden Grad

$$v^2 \pm 1 = z^2 a$$

dplöses altsaa a i to Addender, p og $\frac{q^2}{4}$, idet q tages saa stor at $\frac{q^2}{4}$ er det störste hele Qvadrattal, der kan drages fra a; udvikles nu som Kjædebrök

$$x = \frac{p}{q + x},$$

saa erholdes

$$z = Y_{n-1}$$

$$v = X_{n-1} \pm \frac{Y_{n-1}\, q}{2}.$$

XIII. Ved at betragte den höire Side af Ligningen $x = \frac{p}{q + x}$ finder man, at, naar p gaaer op i q, bliver $Y_{n-1} = a_0 = z = \frac{q}{p}$. For Tal af Formen $\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \ldots + \alpha\beta$ er altsaa

$$z = 2\gamma \ldots \text{ da } q = 2\alpha\beta\gamma \ldots.$$

Denne Værdie for z bliver den samme om ogsaa for $+\alpha\beta$ sættes $-\alpha\beta$. Da $\frac{q^2}{4}$ = et heelt Tal indeholder den Betingelse, at q er et lige Tal, saa giver ovenstaaende Fremgangsmaade mig ogsaa Værdien af z naar $a = \frac{q^2}{4} \pm 2$. Er $a = \frac{q^2}{4} + 4$ og q et ulige Tal, saa kunne vi ikke af de hidtil beviste Sætninger udlede noget i dette Tilfælde gjældende almindeligt Udtryk for z. Sættes $\frac{q}{2} = 2q_{,} + 4$, og antages

$$x = \frac{4}{4q_{,} + 2 + x},$$

erholdes fölgende periodiske Kjædebrök

$$x=\cfrac{1}{q,+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q,+\cfrac{1}{4q,+2+x}}}}}.$$

Da Leddenes Antal i den symmetriske Deel af Kjædebröken er lige, saa giver $Y_{n-1}=z$ mig en Værdie, der tilfredsstiller Opgaven, saa at

$$v^2+1=z^2a.$$

Önskes derimod en Værdie af z, der giver

$$v^2-1=z^2a$$

saa maa Kjædebröken fortsættes indtil man faaer en Convergentsnævner $=Y_{2n-1}$, der da vil tilfredsstille Ligningen

$$v^2-1=z^2a$$

naar z gjöres $=Y_{2n-1}$.

Man erholder da fölgende Udtryk

$$z=(2q,+1)(4q_{,}^2+4q,+4)(2q_{,}^2+2q,+1)$$
$$=\frac{r(r^2+3)(r^2+1)}{2},$$

idet $2q,+1$ sættes $=r$.

Er $a=(2q,+1)^2-4$, findes z ved at sætte

$$x=\frac{4q,-3}{4q,+x}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q,-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{q,-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4q,+x}}}}}}$$

$Y_{n-1}=z$ er her $2q,(q+1)$

og $a=4q_{,}^2+4q,-3=(2q,+1)^2-4$.

XIV. Paa den i Nr. XI fremsatte Maade kan man ganske almindeligt finde

$$[ab+1+(a^2b+2a)(m(a^2b+2a)-b(ab+1))]^2-1=$$
$$=(a^2b+2a)^2\left[m(ab+1)-b^2+\frac{(m(a^2b+2a)-b(ab+1))^2}{4}\right]$$

hvorefter p, q og z kunne beregnes for alle de Værdier af $x = \frac{p}{q+z}$, hvis Udvikling giver 3 Led i den symmetriske Deel af Kjædebröken.

XV. Antages i Ligningen

$$y = \frac{p}{q+y}$$

$p > q+1$ og p og q at være hele Tal, samt at intet heelt Tal b giver $b(q+b) = p$, saa erholdes ved at dividere med $q+y$ i Tæller og Nævner

$$y = a + \frac{p - aq - ay}{q+y}$$

idet a er det största hele Tal, der multipliceret med $q+y$ giver et Product $< p$.

Men man kan ogsaa sætte

$$y = \frac{p+ay}{q+a+y} = a + \frac{p - aq - a^2}{q+a+y},$$

saa at

$$y - a = \frac{p - aq - a^2}{q+a+y}$$

$$= \frac{p - aq - a^2}{q + 2a + (y-a)}.$$

Sættes nu

$$y - a = x,$$

erholdes

$$x = \frac{p - aq - a^2}{q + 2a + x}.$$

y er altsaa liig et heelt Tal + en periodisk Kjædebrök af samme Form som $x = \frac{p}{q+x}$, hvori p antages $< q+1$.

XVI. Antages i Ligningen

$$x = \frac{p}{q+rx}$$

p, q og r at være hele Tal samt $p < q+rx$, saa kan man ved en

Fremgangsmaade, analog med den i Nr. III angivne, udvikle Værdien af x i Form af en uendelig Kjædebrök. Herfra undtages det Tilfælde, at $pr = (q + a)\, a$, da i dette Tilfælde, naar a antages liig et heelt Tal,

$$x = \frac{a}{r} = \text{en rational Störrelse.}$$

Antages ved Udviklingen af

$$x = \frac{p}{q + rx}$$

i Kjædebröks Form den förste Qvotient at være $a_0 =$ det störste hele Tal, der multipliceret med p giver et Product $< q + rx$, saa er

$$x = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{b + rx}{p}}.$$

Multipliceres $b + rx$ med $q - b + rx$, erholdes Productet

$$\begin{aligned} & b\,(q - b) + qrx + r^2x^2 \\ = & b\,(q - b) + r\,(qx + rx^2) \\ = & b\,(q - b) + rp, \text{ da } qx + r^2x = p. \end{aligned}$$

b er liig $q - a_0 p$.

Indsættes denne Værdie for b i Productet $b\,(q - b) + rp$, erholdes

$$(q - a_0 p)\, a_0 p + rp = (b + rx)\,(q - b + rx),$$

hvoraf man atter, ved paa begge Sider af $=$ at dividere med $p(q - b + rx)$, faaer

$$\frac{b + rx}{p} = \frac{(q - a_0 p)\, a_0 + r}{q - b + rx} = \frac{p_\prime}{q - b + rx}$$

idet $a_0\,(q - a_0 p) + r$ sættes $= p_\prime$.

Resten $\dfrac{b + rx}{p}$ kan altsaa transformeres til en Brök, der kun i Nævneren indeholder rx som Addend. Fortsættes Udviklingen, saa erholdes under samme Forudsætning ved $a_\prime$ som ved a_0,

$$\frac{p_\prime}{q - b + rx} = \cfrac{1}{a_\prime + \cfrac{b_\prime + rx}{p_\prime}},$$

i hvilket Udtryk

$$b_{,} = q - b - a_{,}p_{,}.$$

Multipliceres $b_{,} + rx$ med $q - b + rx$, erholdes

$$(b_{,} + rx)(q - b_{,} + rx) = b_{,}(q - b_{,}) + rp.$$

(da for $b_{,}$ sættes $q - b - a_{,}p_{,}$) $\quad = (q - b - a_{,}p_{,})(b + a_{,}p_{,}) + rp$

$\quad = a_{,}p_{,}(q - 2b - a_{,}p_{,}) + b(p - b) + rp$

(fordi $pp_{,} = b(q - b) + rp$) $\quad = p_{,}[a_{,}(q - 2b - a_{,}p_{,}) + p]$

Vi have saaledes

$$(b_{,} + rx)(q - b_{,} + rx) = p_{,}[a_{,}(q - 2b - a_{,}p_{,}) + p].$$

Divideres her paa begge Sider af = med

$$p_{,}(q - b_{,} + rx),$$

erholdes

$$\frac{b_{,} + rx}{p_{,}} = \frac{a_{,}(q - 2b - a_{,}p) + p}{q - b + rx}.$$

Resten $\frac{b_{,} + rx}{p_{,}}$ er altsaa transformeret til en Brök, hvori rx kun forekommer i Nævneren.

Ved paa denne Maade at fremskride i Udviklingen af den uendelige Kjædebeök finder man det almindelige Udtryk for den complete Qvotient

$$a_n + \frac{b_n + rx}{p_n},$$

hvori

$$b_n = q - b_{n-1} - a_n p_n,$$

samt

$$\frac{b_n + rx}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{q - b_n + rx}$$

idet $p_{n+1} = a_n(q - 2b_{n-1} - a_n p_n) + p_{n-1}$. Da de hele Tal i Resterne maae være mindre end $q + rx$, saa maae de samme Rester under Udviklingen vende tilbage og Kjædebröken være periodisk. Den er enten reen periodisk, hvis en transformeret Rest har Formen $\frac{1}{a_m + x}$, eller

X*

blandet periodisk, naar Perioden blot opstaaer ved at de samme Rester vende tilbage, saaledes at den m^{te} Rest er liig den n^{te} Rest, uden at derfor den $(n-1)^{te}$ Rest er liig den $(m-1)^{te}$.

XVII. Ved at oplöse Ligningen

$$v^2 = z^2 a \pm 1$$

kan man bestemme to Störrelser s og h, som med p, q og r give

$$h s q + h^2 = p r s^2 \pm 1$$

Heraf indsees, at $\frac{h}{sr}$ og $\frac{sp}{sq+h}$ maae være den $(n-1)^{te}$ og n^{te} Convergent i en Kjædebrök. Vi finde ved Hjælp heraf fölgende nye Udtryk for x

$$x = \frac{p}{q+rx} = \frac{sp}{sq+srx} = \frac{sp+hx}{sq+h+srx}.$$

Dette Udtryk giver, naar $h < sp$ og $\frac{h}{sr}$ altsaa er den $(n-1)^{te}$ Convergent medens $\frac{sp}{sq+h}$ er den n^{te} Convergent, ved Udviklingen i Kjædebröks Form

$$x = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_, + \cfrac{1}{a_{,,} + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + x}}}}}.$$

Det vil sige: x er liig en reen periodisk Kjædebrök.

Indsætter man for h det större sp i Udtrykket $hsq + h^2$, erholdes

$$pqs^2 + p^2s^2 > prs^2 + 1 > prs^2.$$

Divideres paa begge Sider af $>$ med ps^2, faaer man

$$q + p > r.$$

Da nu ogsaa omvendt, naar $q+p>r$, sp maa være större end h, saa har man altsaa, som Fölge heraf, at Kjædebröken er reen periodisk. Er omvendt Kjædebröken given som reen periodisk, saa maa sp være $>h$ og fölgelig $q+p>r$. Men heraf fölger, at

$$q + p < r$$

maa give en blandet periodisk Kjædebrök, og at omvendt en blandet periodisk Kjædebrök vil give $q+p<r$.

XVIII. Da i den rene periodiske Kjædebrök

$$x=\frac{p}{q+rx}=\frac{X_n+X_{n-1}x}{Y_n+Y_{n-1}x}$$
$$=\frac{X_n}{Y_n-X_{n-1}+Y_{n-1}x}$$
$$X_n=ps,\ Y_n-X_{n-1}=qs \text{ og } Y_{n-1}=rs,$$

saa maa Perioden være symmetrisk, naar

$$X_n=Y_{n-1}$$
$$\text{eller } ps=rs$$
$$\text{eller } p=r.$$

Periodens förste $n-1$ Led maae være symmetriske, naar

$$X_{n-1}=Y_{n-2}$$

eller, da $Y_n=a_n Y_{n-1}+Y_{n-2}$

naar $Y_n-X_{n-1}=$ et Multiplum af Y_{n-1}
eller qs = et Multiplum af rs
eller q = et Multiplum af r.

I begge Tilfælde beviser ogsaa Thesis Hypothesis.

XIX. I enhver periodisk Kjædebrök indeholdes saamange forskjellige Kjædebröker som der ere Led i Perioden og foran Perioden, idet man kan betragte den som en endelig Kjædebrök, til hvis sidste Qvotient er adderet en periodisk Kjædebrök. Værdien af disse Kjædebröker kan man for ethvert givet Punct i en forelagt periodisk Kjædebrök udtrykke ved Hjælp af den Rest og transformerede Rest, ved hvis Udvikling i Kjædebröks Form de opstaae. Lad det være opgivet, i Kjædebröken

$$x=\frac{p}{q+x}=\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_,+\cfrac{1}{a_{,,}+\cdots\cfrac{1}{a_m+\cfrac{1}{a_{m+1}+\cdots\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}}\cdots}}}}}}$$

at finde Udtrykket for Fundamentalligningen for

$$\cfrac{1}{a_m + \cfrac{1}{a_{m+1} \cdot \cdot \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} \cdot \cdot}}}}$$

Jeg har da

$$\frac{b_{m-1}+rx}{p_{m-1}} = \frac{p_m}{q - b_{m-1} + rx} = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m+1+\cdot \cdot \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n+1+\cdot \cdot}}}}$$

sættes denne Værdie liig y, erholdes

$$p_{m-1}\,y = b_{m-1} + rx$$

$$rx = p_{m-1}\,y - b_{m-1}$$

$$y = \frac{p_m}{q - 2b_{m-1} + p_{m-1}\,y}$$

i hvilket Udtryk p_m svarer til p, $q - 2b_{m-1}$ til q og p_{m-1} til r i det sædvanlig brugte Udtryk for Fuudamentalligningen.

XX. Herved erholdes tillige et Middel til at kjende om Perioden er begyndt ved a_m eller ikke. Den er begyndt hvis $p_m + q - 2b_{m-1} > p_{m-1}$, i modsat Fald ikke (XVII).

XXI. Ophöies i Ligningen

$$x = \frac{p}{q+x}$$

Udtrykkene paa begge Sider af $=$ til anden Potents, saa erholdes

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2 + 2qx + x^2},$$

men da x^2 tillige er liig $p - qx$, saa faaes fölgende dobbelte Udtryk for x

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2 + p + qx} = \frac{p^2}{q' + qx} = p - qx = p - qx$$

idet $q^2 + p$ sættes liig q'. Multipliceres disse Udtryk respective med x og $\frac{p}{q+x}$, da erholdes

$$x^3 = \frac{p^3}{q q_{,} + p q + q_{,} x} = \frac{p^3}{q_{,,} + q_{,} x} = q_{,} x - p q.$$

Fortsættes Operationen, faaes efterhaanden

$$x^4 = \frac{p^4}{q q_{,,} + p q_{,} + q_{,,} x} = \frac{p^4}{q_{,,,} + q_{,,} x} = p q_{,} - q_{,,} x$$

$$x^5 = \frac{p^5}{q q_{,,,} + p q_{,,} + q_{,,,} x} = \frac{p^5}{q_{IV} + q_{,,,} x} = q_{,,,} x - p q_{,,}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x^n = \frac{p^n}{q q_{n-2} + p q_{n-3} + q_{n-2} x} = \frac{p^n}{q_{n-1} + q_{n-2} x} = \pm q_{n-2} x \mp p q_{n-3}.$$

Antages i 4de Udtryk til höire överste Fortegn at gjælde og multipliceres andet og fjerde Udtryk med $q q_{n-2} + p q_{n-3} + q_{n-2} x$, saa erholdes

$$p^n = q q_{n-2}^2 x + p q_{n-3} q_{n-2} x + q_{n-2}^2 x^2 - p q_{n-3} q q_{n-2} - p^2 q_{n-3}^2 - p q_{n-3} q_{n-2} x$$

$$= q_{n-2}^2 (q x + x^2) - p q_{n-3} q q_{n-2} - p^2 q_{n-3}^2$$

$$= p q_{n-2}^2 - p q_{n-3} q q_{n-2} - p^2 q_{n-3}^2$$

$$= p q_{n-2}^2 + \frac{q^2 q_{n-2}^2}{4} - \frac{q^2 q_{n-2}^2}{4} - p q_{n-3} q q_{n-2} - p^2 q_{n-3}^2$$

$$= q_{n-2}^2 \left(p + \frac{q^2}{4}\right) - \left(p q_{n-3} + \frac{q q_{n-2}}{2}\right)^2.$$

Antages i 4de Udtryk nederste Fortegn at gjælde, da bliver Ligningen den samme, men p's Fortegn bliver da —.

XXII. Efter den i Nr. XVII angivne Methode kan den reen periodiske Kjædebrök

$$x = \frac{p}{q + r x}, \text{ hvori } p + q > r,$$

ogsaa fremstilles under Formen

$$x = \frac{p s + h s}{q s + h + r s x}$$

idet $\frac{p s}{q s + h}$ er den n^{te} og $\frac{h}{r s}$ den $(n-1)^{te}$ Convergent i en Kjædebrök, hvis n Qvotienter udgjöre Perioden i x.

$\frac{rs}{qs+h}$ og $\frac{h}{ps}$ ville altsaa ifölge en Sætning i Læren om de endelige Kjædebröker være den n^{te} og $(n-1)^{te}$ Convergent i en Kjædebrök, hvis Qvotienter ere de samme som i $\frac{ps}{qs+h}$ men satte i omvendt Orden.

$$y=\frac{rs+hy}{qs+h+psy},$$

er altsaa liig en reen periodisk Kjædebrök, hvis Periode indeholder Qvotienterne i x i omvendt Orden. Men da

$$y=\frac{rs+hy}{qs+h+psy}=\frac{rs}{qs+psy}=\frac{r}{q+py},$$

erholdes som Resultat: at man ved at ombytte p og r i Udtrykket for den reen periodiske Kjædebrök faaer en ny Kjædebrök, der ogsaa er reen periodisk, og hvis Periode indeholder de samme Led som Perioden i den givne, men satte i omvendt Orden.

XXIII. Betegnes ved y og x de i XXII angivne Værdier, da kan bevises at

$$y=\frac{rx}{p}.$$

Multipliceres nemlig Ligningen

$$x=\frac{p}{q+rx} \text{ med } \frac{r}{p},$$

da erholdes

$$\frac{rx}{p}=\frac{r}{q+rx}=\frac{r}{q+\frac{rpx}{p}},$$

sættes nu

$$\frac{rx}{p}=u,$$

da haves videre

$$u=\frac{r}{q+pu}=y=\frac{r}{q+py}$$

eller

$$\frac{rx}{p} = u = y.$$

XXIV. Enhver Rest i en reen periodisk Kjædebrök er selv liig en reen periodisk Kjædebrök, hvis förste Qvotient er den umiddelbart af Resten udviklede Qvotient og hvis sidste Qvotient er den Resten umiddelbart forangaaende. Lad Udtrykket for denne Rest være $\frac{b_m + rx}{p_m} = \frac{p_{m+1}}{q - b_m + rx}$, da er Fundamentalligningen for den til Resten svarende Kjædebrök efter XIX

$$y = \frac{p_{m+1}}{q - 2b_m + p_m y}.$$

Ombyttes nu her p_m og p_{m+1}, da bliver den nye Kjædebrök, der svarer til $\frac{b_m + rx}{p_{m+1}} = \frac{p_m}{q - b_m + rx}$ af Formen

$$y_{,} = \frac{p_m}{q - 2b_m + p_{m+1} y_{,}}$$

og dens Periode vil altsaa ifölge XXII være Perioden i y i omvendt Orden. Lad os nu antage, at en anden Rest i Kjædebröken giver samme Periode som y, da haves, naar denne anden Rest betegnes ved $\frac{b_k + rx}{p_k}$,

$$\frac{b_k + rx}{p_k} = \frac{b_m + rx}{p_{m+1}},$$

men da er $b_m = b_k$, $p_{m+1} = p_k$, og da de transformerede Rester ogsaa maae være ligestore, haves ogsaa $p_m = p_{k+1}$. Disse tre sidste Ligninger maae finde Sted, fordi ellers rx vilde blive rational.

I alle de Tilfælde altsaa, hvor man, ved paa et Punct i Kjædebröken at tage Qvotienterne i omvendt Orden, faaer samme Periode, som man paa et andet Punct faaer ved at tage Qvotienterne i deres naturlige Orden, i alle disse Tilfælde, paastaaer jeg, maa i de respective

Rester b_m være $= b_k$, $p_{m+1} = p_k$ og $p_m = p_{k+1}$. De Perioder, hvori dette skal kunne finde Sted, maae enten være symmetriske eller i det mindste kunne oplöses i to symmetriske Dele.

a) Er hele Perioden symmetrisk, og altsaa af Formen $x = a, a_{,,} a_{,,,} a_{IV} \dots a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n x$ idet $a_{,} = a_n$, $a_{,,} = a_{n-1}$, $a_{,,,} = a_{n-2}$, $a_{IV} = a_{n-3}$ eller i Almindelighed $a_m = a_{n-m+1}$, saa indsees let iſölge Ovenstaaende, at i Resterne mellem a_m og a_{m+1} og mellem a_{n-m} og a_{n-m+1} maa p_m være $= p_{n-m+1}$, og $b_m = b_{m-m}$ og $p_{m+1} = p_{n-m}$.

b) Kan Perioden oplöses i to symmetriske Dele, da gjælder det samme. Man tænke sig i Perioden x efter a_n indskudt en symmetrisk Gruppe af Qvotienter, da indsees, at man endnu vil faae samme Periode for y og y, enten man læser fremad efter a_{n-m} eller man læser tilbage foran a_m.

c) Kan Perioden derimod ikke deles i to symmetriske Dele og hele Perioden heller ikke er symmetrisk, da findes der ingen Rester i samme Periode, i hvilke alle de tre rationale Störrelser paa den ovenfor viiste Maade ere stykkeviis ligestore.

Heraf fölger altsaa: I de under *a* og *b* angivne Tilfælde medförer Symmetrie i Perioden ogsaa en Symmetrie mellem de hele Tal i Resterne og de transformerede Rester, i andre Tilfælde derimod ikke, fordi i ingen andre Perioder en m^{te} Rest ved at multipliceres med $\frac{p_m}{p_{m+1}}$ kan gjöres liig en anden Rest.